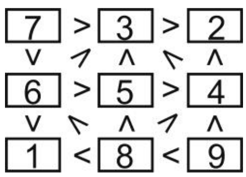
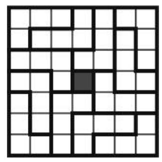
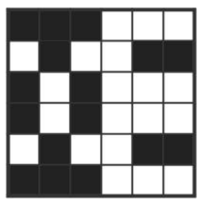
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год. 4 класс.

Ответы.

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

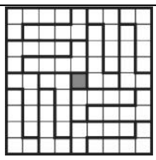
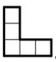
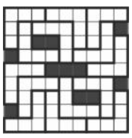
Задача	Ответ	Баллы
1.	1+2×3+4=5+6	
2.	14	
3.	600 солдат	
4.	3 василька	
5.	Через 13 минут и 43 секунды	
6.	19×9=171	
7.	24 монеты	
8.	Проверять пример! Вариант:  *Любой правильный пример — 5 баллов.*	
9.	14 девочек и 17 мальчиков	
10.	134	

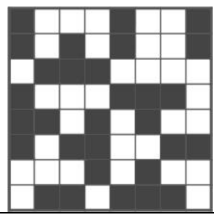
Задача	Ответ	Баллы
11.	Проверять пример на 12 фигурок. Вариант:  *Любой правильный пример — 5 баллов.*	
12.	6 ребят	
13.	Проверять, вариант: (2–1)+(1+1)×(2+0+1)×9=55 *Любой правильный пример — 5 баллов.*	
14.	290 роботов	
15.	Катя плавает, Женя поет, Наташа занимается математикой	
16.	47 кубиков	
17.	Проверять пример. Вариант:  *Любой правильный пример — 5 баллов.*	
18.	11 и 18. *Один ответ при отсутствии неверных — 2 балла. Два верных и один неверный — 2 балла. При наличии хотя бы двух неверных ответов — 0 баллов*	
19.	363	
20.	252	

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год. 5 класс.

Ответы.

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

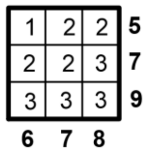
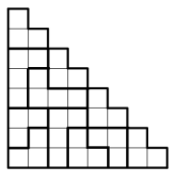
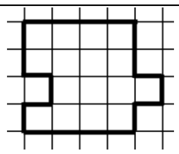
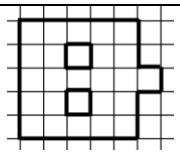
Задача	Ответ	Баллы
1.	1+2×3+4=5+6	
2.	13 участников	
3.	6	
4.	Федя, Алина, Никита, Лена – именно в таком порядке	
5.	289 плиток	
6.	15 хлопковых и 20 льняных полотен	
7.	Проверять пример на 16 фигурок, один пример на рисунке. *Любой верный пример — 5 баллов!*  ***Если дети решали задачу для уголка вида*** ***, то проверять пример на 14, один из них на рисунке:*** 	
8.	28 наборов	
9.	Проверять пример! Вариант: 2+(1+1)×(1+2+0)×(1+9)=62 *Любой верный ответ — 5 баллов!*	
10.	118	
11.	1010 лжецов	

Задача	Ответ	Баллы
12.	Кариму 14 лет	
13.	98	
14.	32 треугольника	
15.	Проверять пример! Вариант: 3 4 7 5 9 2 6 1 10 8 *Любой верный пример — 5 баллов!*	
16.	215 см	
17.	3 < 4 < 5 > 1 < 2 ∨ ∨ ∨ ∧ ∧ 1 < 3 > 2 < 4 < 5 ∧ ∨ ∨ ∨ ∨ 5 > 1 < 3 > 2 < 4 ∨ ∧ ∨ ∧ ∨ 4 > 2 > 1 < 5 > 3 ∨ ∧ ∧ ∨ ∨ 2 < 5 > 4 > 3 > 1 *Это единственное решение!*	
18.	Проверять пример! Вариант: *Любой верный пример — 5 баллов!* 	
19.	18:00	
20.	7 учеников	

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год. 6 класс.

Ответы.

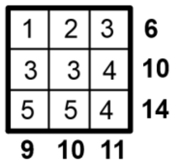
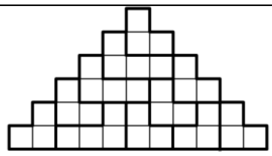
Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

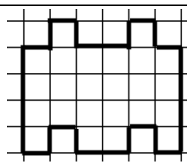
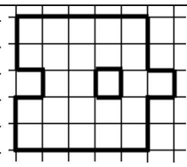
Задача	Ответ	Баллы
1.	*Пример проверять! Один из вариантов на рисунке. Любой правильный пример — 5 баллов.* 	
2.	898 рублей	
3.	361	
4.	На 10 минут	
5.	Фарин — 40, Двалин — 20, Балин — 40	
6.	Женя	
7.	 *Например, так. Дети могут придумать другие примеры!* *Проверять правильность. Любой верный ответ — 5 баллов!*	
8.	$\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$ или 3,4. *Ответ* $\frac{85}{25}$ *— 3 балла.*	
9.	996996	
10.	420 рублей	
11.	5	
12.	*Проверять пример! Например, так:* (21 – 11 + 2 × 0) × (1 + 9) *или* (2 – 1) : (1 + 1) × 20 × (1 + 9). *Любой верный ответ — 5 баллов!*	
13.	98	
14.	3	
15.	45,5=91/2	
16.	48	
17.	  *Пример проверять. Один из простейших вариантов — на первом рисунке. Здесь P=20, S=16. Вообще, достаточно взять квадрат 4×4, и вырезать одну неугловую клетку на стороне, и добавить клетку на другой стороне. Разрешаются и примеры с дырками, как на втором рисунке. На нем P=30, S=24. Любой верный ответ — 5 баллов!*	
18.	7 часов 20 минут = 440 минут. *Принимать любой из этих ответов.*	
19.	**Описанная в условии ситуация невозможна.** *Любой ответ, равносильный* ***«не может быть»*** *— 5 баллов. Другие ответы — 0 баллов.*	
20.	18:00	

<u>Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год.   7 класс.</u>

<u>Ответы.</u>

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача	Ответ	Баллы
1.	*Пример проверять! Один из*  *вариантов на рисунке. Любой правильный пример — 5 баллов.*	
2.	848 рублей	
3.	9/10=0,9	
4.	 *Например, так. Дети могут придумать другие примеры! Проверять правильность. Любой верный ответ — 5 баллов!*	
5.	525	
6.	Галя	
7.	21	
8.	9969969	
9.	*Проверять пример!* Например, так: (2 × (1 + 1 + 1) + 2) × (0 – 1 + 9) или 2 × 1 × (1 + 1 + 2) × (0 – 1 + 9). *Обратите внимание, что по условию разрешается объединять соседние цифры в числа. Любой верный ответ — 5 баллов!*	
10.	$3{,}4=3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$. *Принимать любой из этих ответов!*	

Задача	Ответ	Баллы
11.	Фарин — 60, Двалин — 15, Балин — 45	
12.	8	
13.	64009	
14.	37	
15.	  *Пример проверять. Один из простейших вариантов — на первом рисунке. Здесь P=28, S=24. Вообще, достаточно взять прямоугольник 4×6, и вырезать две неугловые клетки, и добавить две клетки на других сторонах. Разрешаются и примеры с дырками, как на втором рисунке.*	
16.	157 и 36. *Один верный ответ (любой из двух, при этом второй может быть как неверным, так и отсутствовать) — 2 балла*	
17.	0, 1 или 2. *Один верный ответ при отсутствии неверных — 1 балл. Два верных ответа при отсутствии неверных — 3 балла. Каждый неверный ответ — минус 2 балла, но не ниже нуля.*	
18.	16:30	
19.	10,5 часов = 10 часов 30 минут = 630 минут. *Принимать любой из этих ответов*	
20.	96	

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

8 класс

8-1. Начинающий цветовод высадил на свою грядку ромашки, лютики и маргаритки. Когда они взошли, оказалось, что ромашек в 5 раз больше, чем не-ромашек, а лютиков – в 5 раз меньше, чем не-лютиков. Какую долю среди проросших растений занимают маргаритки?

Ответ. Нулевую. Они не взошли.

Решение. Ромашки составляют 5/6 от всех цветов, а лютики – 1/6. Значит, их общее количество равно количеству всех цветов.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

8-2. Коля старше Толи, и возраст каждого из них — целое число, меньшее 100. Если поменять местами цифры возраста Коли, получится возраст Толи. Более того, разность между квадратами их возрастов является квадратом целого числа. Сколько лет каждому?

Ответ: Николаю — 65 лет, Анатолию — 56 лет.

Решение. Пусть возраст Коли равен $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b — цифры от 0 до 9. Тогда возраст Толи $\overline{ba} = 10b + a$, и $a > b$. Имеем $(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 9 \cdot 11(a + b)(a - b)$. Эта разность является квадратом целого числа, поэтому $a + b$ или $a - b$ должны делиться на 11. Поскольку a и b — цифры, очевидно, возможно только равенство $a + b = 11$. Значит, $a - b = 11 - 2b$ — квадрат целого числа. Несложный перебор приводит только к одному варианту: $a = 6$, $b = 5$. Таким образом, возраст Николая — 65 лет, а Анатолия — 56 лет.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Показано, что разность квадратов имеет вид $9 \cdot 11(a + b)(a - b)$ – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

8-3. Вика записывает свои оценки с начала года. В начале второй четверти она получила пятерку, после чего доля пятерок увеличилась на 0,15. После очередной оценки доля пятерок увеличилась еще на 0,1. Сколько пятерок ей нужно теперь получить, чтобы увеличить их долю еще на 0,2?

Ответ. 4.

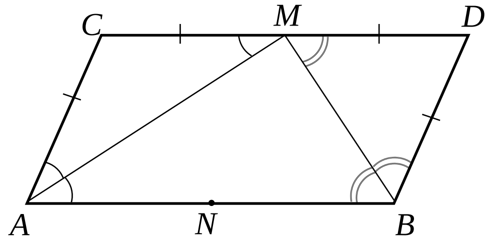
Решение. Пусть в первой четверти у Вики было n оценок, из которых k пятерок. Тогда после первой пятерки второй четверти их доля увеличилась на $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = 0{,}15$. Аналогично после второй пятерки прирост составил $\frac{k+2}{n+2} - \frac{k+1}{n+1} = 0{,}1$. Упрощая каждое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} n - k = 0{,}15n(n+1) \\ n - k = 0{,}1(n+1)(n+2) \end{cases}$$

В частности, $0{,}15n(n + 1) = 0{,}1(n + 1)(n + 2)$, то есть $1{,}5n = n + 2$, $n = 4$. Подставляя это значение в первое уравнение найдем, что $k = 4 - 0{,}15 \cdot 4 \cdot 5 = 1$. Значит, после двух полученных во второй четверти пятерок их доля составила 3/6 = 0, 5. Вика хочет, чтобы после получения ещё m пятерок их доля стала равной 0,5 + 0,2 = 0,7, то есть $\frac{3+m}{6+m} = 0{,}7$. Решая это уравнение, получаем, что $m = 4$.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Составленная система уравнений – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

8-4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Обозначим точку пересечения биссектрис углов C и D через N. Докажите, что MN параллельно AD.



Решение. В силу параллельности AB и CD угол $\angle CMA = \angle MAB = \angle MAC$, с силу чего треугольник ACM – равнобедренный и $AC = CM$. Аналогично показывается, что $MD = BD$, что совпадает с AC. Итак, M – середина CD. Аналогично можно показать, что биссектрисы углов C и D пересекают сторону AB в ее середине. Значит, эта середина и есть точка N, откуда и следует, что $MN \parallel AC$.

Критерии. Если выяснен факт $AC = CM$ – 2 балла. Если факт, что N – середина AB, упоминается, но не доказан—не более 4 баллов. Полное решение – 7 баллов.

8-5. Трудолюбивая Ася перемножила два трехзначных числа, а ленивый Петя просто написал их подряд одно за другим. Результат Пети оказался в 7 раз больше, чем у Аси. Какие числа она перемножала?

Ответ. 143 и 143

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Результат Аси – ab, Пети – $1000a + b$, они связаны соотношением $1000a + b = 7ab$, откуда $b = \frac{1000a}{7a-1}$. Заметим, что числа a и $7a - 1$ не имеют общих делителей, так что $7a - 1 = p$ – делитель 1000. В силу того, что $a \geq 100$ имеем $p \geq 699$, но тогда $p = 1000$, $a = 1001/7 = 143$, $b = a$.

Критерии. Только ответ 0 баллов, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но не доказано, что других нет – 5 баллов.

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

9 класс

9-1. Почтальон Печкин подсчитал, что половину пути он шел пешком (скорость 5 км/ч), и только треть времени – ехал на велосипеде (скорость 12 км/ч). Не ошибся ли он в расчетах?

Ответ. Ошибся.

Решение. Обозначим весь путь Печкина через $2S$ км. Тогда пешком он прошел путь S км и потратил на это S / 5 = 0,2 S (часов). По условию, это составило 2/3 всего потраченного времени, то есть весь путь занял $0{,}2S : 2/3 = 0{,}3S$ (часов), а на велосипеде он ехал $0{,}1S$ часов. Тогда его скорость должна составить $S/(0{,}1S) = 10$ (км/ч).

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

9-2. Школьная волейбольная команда провела несколько матчей. После того, как она выиграла очередной матч, доля побед стала на величину 1/6 больше. Чтобы увеличить долю побед ещё на 1/6, волейболистам пришлось выиграть ещё два матча подряд. Какое минимальное число побед нужно одержать команде, чтобы доля выигрышей увеличилась ещё на 1/6?

Ответ. 6.

Решение. Пусть в начале команда провела n матчей, из которых k выиграла. Тогда после очередного выигрыша доля побед увеличилась на $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{1}{6}$. Аналогично после ещё двух побед прирост составил $\frac{k+3}{n+3} - \frac{k+1}{n+1} = \frac{1}{6}$. Упрощая каждое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} n - k = \dfrac{n(n+1)}{6} \\ 2(n - k) = \dfrac{(n+1)(n+3)}{6} \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получаем, что $\frac{n+3}{n} = 2$, откуда, $n = 3$. Подставляя это значение в первое уравнение найдем, что $k = 3 - 3\cdot 4/6 = 1$. Значит, к началу событий доля побед была 1/3, после очередной победы – 2/4, после ещё двух команда одержала 1 + 1 + 2 = 4 победы в 3 + 1 + 2 = 6 играх. Если команда одержит ещё m побед, то их доля составит $\frac{4+m}{6+m}$, что должно совпасть с $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Решая соответствующее уравнение получаем, что $m = 6$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Составлена система уравнений – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

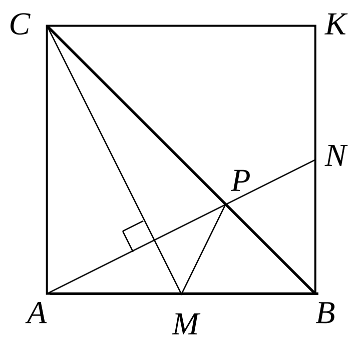
9-3. Можно ли среди чисел $2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, найти хотя бы один куб целого числа?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что существуют такие натуральные числа k и n, что $2^{2^n} + 1 = k^3$. Тогда k — нечётное, и $2^{2^n} = k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1)$. Значит, $k - 1 = 2^s$ и $k^2 + k + 1 = 2^t$, где s и t — некоторые натуральные числа. Теперь имеем $2^{2s} = (k - 1)^2 = k^2 - 2k + 1$ и $2^t - 2^{2s} = 3k$. Но число $2^t - 2^{2s}$ — чётное, в то время как $3k$ — нечётное, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что числа $k - 1$ и $k^2 + k + 1$ — степени двойки, — 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

9-4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90°, точка M — середина AB. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная CM, пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMP$.



Решение. Достроим равнобедренный прямоугольный треугольник до квадрата $ABKC$ (см. рис.). Пусть N — точка пересечения AP и BK. Прямые CM и AN взаимно перпендикулярны, поэтому $\angle AMC = \angle BNA$. Отсюда следует равенство прямоугольных треугольников MAC и BNA, и значит, $AM = BN$. Так как $MB = BN$ и $\angle MBP = \angle P\ BN = 45°$, то треугольники MBP и NBP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle BMP = \angle BNP$; и так как $\angle BNP = \angle BNA = \angle AMC$, требуемое равенство доказано.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

9-5. На доске записан пример на умножение двух трехзначных чисел. Если вместо знака умножения написать 0, получим семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

Ответ. В 73.

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Тогда указанное семизначное число будет иметь вид $10000a + b$, по условию $10000a + b = nab$, откуда $b = \frac{10000a}{na-1}$.

Заметим, что числа a и $na - 1$ не имеют общих делителей, так что $na - 1 = p$ – делитель 10000. Кроме того, $nab \geq 10000a$, то есть $nb \geq 10000$, $n \geq 10000/999 > 10$. Значит, $n \geq 11$, $p \geq 1099$, то есть надо проверить значения p равные 10000, 5000, 2500, 2000, 1250 и искать те из них, для которых $p + 1$ раскладывается на двузначный (n) и трехзначный (a) делители.

Пусть $p = 10000$, имеем $10001 = 73 \cdot 137$, тогда $n = 73$, $a = 137$, $b = 10000 \cdot a/p = a$.

Пусть $p = 5000$, $5001 = 3 \cdot 1667$, число 1667 – простое; трехзначных делителей нет.

Пусть $p = 2500$, $2501 = 41 \cdot 61$, нет трехзначных делителей.

Пусть $p = 2000$, $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. В силу того, что $n \geq 11$, подходит значение не менее 23, но тогда $a \leq 3 \cdot 29 = 87$ двузначно.

Пусть $p = 1250$, $1251 = 3 \cdot 417$, число 417 – простое. Нет разложения на двузначное и трехзначное числа.

Итак, остается только вариант $n = 73$. Действительно, $1370137 / 73 = 18769 = 137 \cdot 137$.

Критерии. Только ответ – 1 балл, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но перебор неполный или необоснованный – 5 баллов.

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

10 класс

10-1. У Пятачка есть воздушные шарики пяти цветов. Ему удалось расположить их в ряд таким образом, что для любых двух различных цветов в ряду всегда найдутся два соседних шарика этих цветов. Какое наименьшее количество воздушных шариков могло быть у Пятачка?

Ответ. 11 шариков.

Решение. Рассмотрим шарики цвета a. Их соседями должны быть шарики всех 4 остальных цветов. Но у одного шарика не более двух соседей, так что шариков цвета a не менее 2. Это же верно для каждого из 5 цветов, так что всего шариков не менее 10.

Заметим, что какой-то шарик цвета b находится на краю ряда. У него только один сосед, так что у двух шариков этого цвета не более 3 соседей. Поэтому для выполнения условий нам нужно добавить ещё как минимум один шарик цвета b. Так всего понадобится не менее 11 шариков.

Покажем, что 11 шариков хватит. Пусть a, b, c, d, e – цвета шариков. Их можно расположить, например, так: $a\ b\ c\ d\ e\ c\ a\ d\ b\ e\ a$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Оценка (что шариков не меньше 11) – 4 балла. Пример нужного расположения – 3 балла.

10-2. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \ge |b + c|$, $|b| \ge |c + a|$ и $|c| \ge |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

Решение. Возведём в квадрат обе части каждого неравенства:

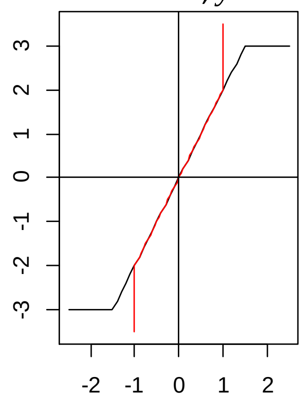
$$\begin{cases} a^2 \ge (b+c)^2 \\ b^2 \ge (c+a)^2 \\ c^2 \ge (a+b)^2 \end{cases}$$

Сложим все три неравенства и после перегруппировки слагаемых получим $(a + b + c)^2 \le 0$. Отсюда, очевидно, следует, что $a + b + c = 0$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Разобраны отдельные случаи раскрытия модуля (но не полный перебор) – не более 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

10-3. Решить систему $\begin{cases} 2y = |2x+3| - |2x-3| \\ \ 4x = |y+2| - |y-2| \end{cases}$

Ответ: $-1 \le x \le 1$, $y = 2x$.



Решение. Нарисуем графики линий, описанных каждым уравнением. Каждый из них представляет собой ломаную из 3 звеньев.

Первое уравнение: $y = \frac{|2x+3| - |2x-3|}{2}$

$x < -1{,}5$; $y = -3$, при $x > -1{,}5$; $y = 3$, при $-1{,}5 \le x \le 1{,}5$; $y = 2x$.

Второе уравнение: $x = \frac{|y+2| - |y-2|}{4}$

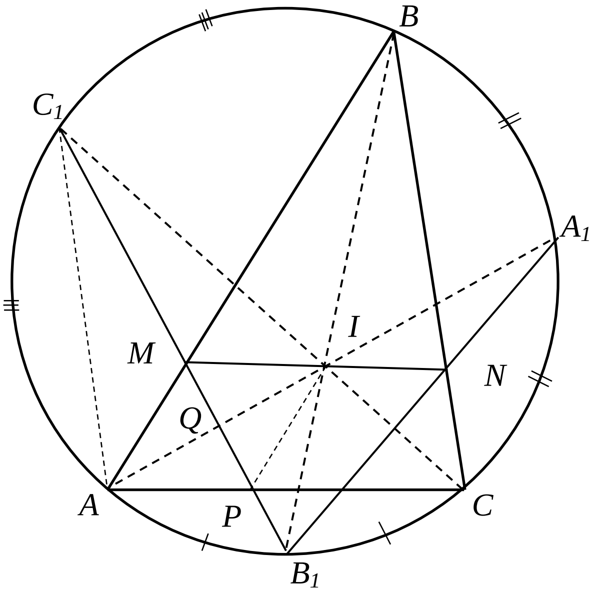
$y < -2$; $x = -1$, при $y > 2$; $y = 1$, при $-2 \le x \le 2$; $y = x/2$.

Как мы видим, графики совпадают на промежутке $-1 \le x \le 1$. То есть решением будут все точки отрезка прямой $y = 2x$.

Критерии. Полный ответ без достаточного обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

10-4. В остроугольном треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AB и B_1C_1 пересекаются в точке M, прямые BC и A_1B_1 — в точке N. Верно ли, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC?

Ответ: да, верно.



Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC (точка I является точкой пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1), и пусть прямая B_1C_1 пересекает сторону AC и биссектрису AA_1 в точках P и Q соответственно (см. рис.). Тогда $\angle AQC_1 = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC_1} + \overset{\frown}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CA}\right) = 90°$. Поскольку BB_1 — биссектриса, из равенства углов ABB_1 и B_1BC следует равенство дуг CB_1 и B_1A, а значит, и равенство углов AC_1B и B_1C_1C, опирающихся на эти дуги. Поэтому B_1C_1 — биссектриса угла AC_1I. Кроме того, из перпендикулярности прямых AI и B_1C_1 следует, что треугольник AC_1I — равнобедренный, $AC_1 = C_1I$, и значит, CQ — медиана. Поскольку MQ тоже делит AI пополам, отсюда также получается свойство равнобедренности треугольника AMI, $AM = MI$. Аналогично доказывается, что B_1C_1 — биссектриса углов AB_1I и равнобедренность треугольника API. Так как AI — биссектриса угла A, треугольники AMI и API имеют общую сторону AI и два равных прилежащих к этой стороне угла. Значит, эти треугольники равны, и четырёхугольник $AMIP$ — ромб, поэтому $MI \parallel AC$. Аналогично устанавливается, что $NI \parallel AC$, то есть точки M, I и N лежат на одной прямой.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

10-5. Из 80 одинаковых деталей лего собрали несколько фигурок, причем число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трех самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трех самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

Ответ. 8 фигурок, 16 деталей.

Решение. Обозначим число деталей в фигурках через $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, Если $a_3 \leq 5$, то $a_3 + a_2 + a_1 \leq 5 + 4 + 3 = 12 < 14$. Значит, $a_3 \geq 6$.

Аналогично можно рассмотреть три самых больших фигурки: $14 + 15 + 16 = 45 > 43$, поэтому $a_{n-2} \leq 13$.

Уберем три самых больших и три самых маленьких фигурки. В оставшихся будет 80 – 14 – 43 = 23 детали, причем в каждой от 7 до 12. Одной фигурки явно не хватит, а три будет лишнего (7 + 8 + 9 = 24). Значит, 23 детали образуют 2 фигурки. Это возможно, причем единственным способом: 23 = 11 + 12.

Имеем 43 = 13 + 14 + 16 – единственное разложение с $a_6 \geq 13$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для a_3 и a_{n-3} – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа фигурок – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

11 класс

11-1. Даны три числа. Если каждое из них уменьшить на 1, то их произведение тоже уменьшится на 1. Если все исходные числа уменьшить на 2, то их произведение тоже уменьшится на 2.

а) На сколько уменьшится произведение, если все исходные числа уменьшить на 3?

б) Укажите какие-нибудь три числа, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: а) на 9; б) 1, 1, 1.

Решение. а) Пусть нам даны изначально числа a, b и c. Обозначим $ab + bc + ca = x$ и $a + b + c = y$. По условию $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - 1$ и $(a - 2)(b - 2)(c - 2) = abc - 2$. Раскрывая скобки и сокращая подобные слагаемые, получим $x - y = 0$ и $-2x + 4y = 6$, откуда $x = y = 3$. Тогда нужная нам разность равна $abc - (a - 3)(b - 3)(c - 3) = 3x - 9y + 27 = 3{\cdot}3 - 9{\cdot}3 + 27 = 9$.

б) Подходят, например, числа $a = b = c = 1$. Замечание. Можно доказать, что приведённый набор действительных чисел — единственный.

Критерии. За каждый правильный ответ в пунктах а) и б) – по 2 балла. Доказано соотношение $ab + bc + ca = a + b + c = 3$ – 3 балла.

11-2. В некоторой системе координат построили график функции $y = \cos^2 x$. После чего координатные оси стерли. Постройте систему координат так, чтобы эта же линия стала графиком функции $z = \cos t$ в новой системе координат.

Решение. Имеем $y = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Мы можем теперь положить $2x = t$, $y = (z + 1)/2$, тогда переменные z и t связаны соотношением $z = cos\, t$, то есть пара (t, z) задает положение точки в искомой системе координат.

Мы видим, что $t = 0$ при $x = 0$, и $t = 1$ при $x = 2$. Это значит, что эталон по оси x уменьшился вдвое, а точка отсчета осталась на том же уровне.

С другой стороны, значение $z = 0$ (начало отсчета) соответствует $y = 1/2$, а значение $z = 1$ – координате $y = 1$. Таким образом, по оси Oy эталон также уменьшился вдвое, но ось сместилась на 1/2 вверх (в смысле старой системы координат).

Критерии. Только рисунок – 0 баллов. Описание новой системы координат без обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

11-3. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

Решение. Возведём в квадрат обе части каждого неравенства:

$$\begin{cases} a^2 \geq (b+c)^2 \\ b^2 \geq (c+a)^2 \\ c^2 \geq (a+b)^2 \end{cases}$$

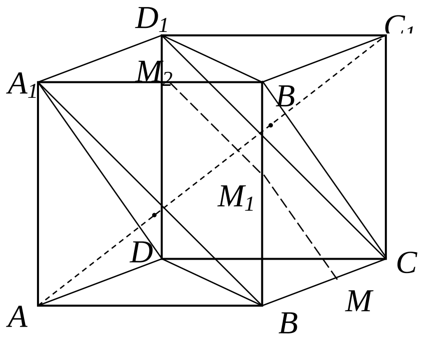
Сложим все три неравенства и после перегруппировки слагаемых получим $(a + b + c)^2 \leq 0$. Отсюда, очевидно, следует, что $a + b + c = 0$.

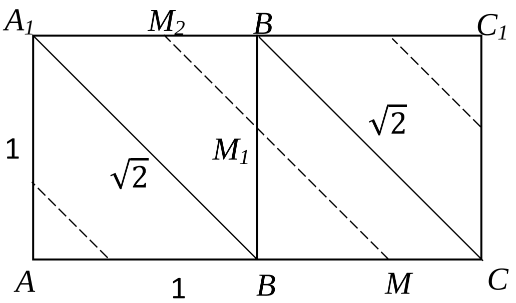
Критерии. Полный ответ без достаточного обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

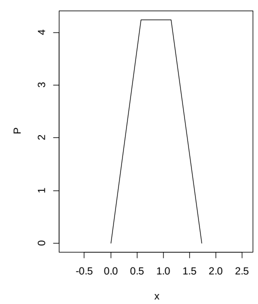
11-4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 проведена диагональ AC_1. Для каждой точки N, лежащей на этой диагонали, построено сечение куба плоскостью, перпендикулярной AC_1 и проходящей через N. Пусть P – периметр этого сечения. Постройте график зависимости P от величины $x = AN$.

Решение. Заметим, что сечения BDA_1 и B_1D_1A перпендикулярны диагонали AC_1 и делят ее на три равные части, каждая длиной $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Достаточно рассмотреть след, который сечение оставляет на двух гранях, например, ABB_1A_1 и BCC_1B_1, весь периметр сечения в три раза больше. Все сечения параллельны между собой. Следы проходят под углом 45° к ребрам.

С ростом x сначала сечение имеет форму правильного треугольника, периметр которого растет пропорционально x. Самое большое сечение – то, которое проходит через точки B, D и A_1, его периметр равен $3\sqrt{2}$, тот же периметр у треугольника B_1D_1C.







Итак, при $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ имеем $P = 3\sqrt{6}x$, при $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ имеем $P = 3\sqrt{2}$, при $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ имеем $P = 3\sqrt{6}(\sqrt{3} - x)$.

Критерии. Полный ответ без достаточного обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

11-5. Дед Мороз готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причем все они разные по числу конфет. В трех самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трех самых больших – 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?

Ответ. 10 пакетов, 5 конфет.

Решение. Пронумеруем подарки от меньшего к большему, от 1 до n. Если в третьем 7 или меньше конфет, то в трех меньших подарках не более 7 + 6 + 5 = 18 конфет. Противоречит условию. Итак, в третьем подарке не менее 8 конфет. Аналогично, в третьем с конца подарке не более 15 конфет (16 + 17 + 18 = 51 > 50).

Уберем три самых больших и три самых маленьких подарка. В оставшихся будет 115 – 20 – 50 = 45 конфет, причем в каждом от 9 до 14. Трех пакетов явно не хватит (14 + 13 + 12 = 39), а пять будет лишнего (9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55). Значит, 45 конфет разложено в 4 пакета. Это возможно: 47 = 9 + 11 + 12 + 13. Заметим, что в четвертом пакете не может быть более 9 конфет: 10 + 11 + 12 + 13 = 46 > 45).

Если в четвертом пакете 9 конфет, то в третьем не больше 8, во втором – не больше 7, так что в первом пакете – не менее 20 – 8 – 7 = 5 конфет. Но и не более, так как 6 + 7 + 8 = 21.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для a_3 и a_{n-3} – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа пакетов – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.